

Dinámica

MATEMÁTICA

LIBRO CARPETA



puerto de palos

ÍNDICE

Capítulo 1: VECTORES Y FRACTALES

1. Vectores.....	5
2. Adición y sustracción de vectores.....	7
3. Producto con vectores. Módulo de un vector.....	9
4. Ecuación vectorial de la recta.....	13
5. Noción de fractal.....	15
Integración final.....	17
Para recordar.....	19
Autoevaluación.....	20

Capítulo 2: NÚMEROS COMPLEJOS

6. El conjunto de los números complejos.....	21
7. Módulo de un complejo. Forma polar y trigonométrica.....	23
8. Adición y sustracción.....	25
Integración 6-7-8.....	27
9. Potencias de i . Cuadrado y cubo de un complejo.....	29
10. Multiplicación y división.....	31
11. Operaciones combinadas.....	35
Integración final.....	39
Para recordar.....	41
Autoevaluación.....	42

Capítulo 3: FUNCIONES

12. Función parte entera, por partes y valor absoluto.....	43
13. Función lineal.....	47
14. Función cuadrática.....	51
Integración 12-13-14.....	55
15. Función polinómica.....	57
16. Función racional.....	61
17. Función homográfica.....	63
18. Estudio de funciones.....	67
Integración final.....	69
Para recordar.....	71
Autoevaluación.....	72

Capítulo 4: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

19. Funciones trigonométricas.....	73
20. Interpretación y análisis de funciones trigonométricas.....	77
21. Funciones trigonométricas inversas.....	79
22. Ecuaciones trigonométricas.....	81
Integración final.....	85
Para recordar.....	87
Autoevaluación.....	88

Capítulo 5: LÍMITES

23. Concepto intuitivo de límite.....	89
24. Límite de una función.....	91
25. Propiedades de los límites.....	93
26. Límites infinitos.....	95
Integración 23-24-25-26.....	97

27. Indeterminaciones del tipo $0/0$	99
28. Indeterminaciones del tipo ∞/∞	101
29. Continuidad de una función en un punto. Discontinuidades.....	103
30. Asíntotas.....	105
Integración final.....	107
Para recordar.....	109
Autoevaluación.....	110

Capítulo 6: DERIVADAS

31. Concepto de derivada.....	111
32. Derivación de funciones elementales.....	113
33. Derivación de funciones compuestas.....	117
34. Recta tangente y recta normal.....	119
Integración 31-32-33-34.....	121
35. Extremos relativos.....	123
36. Concavidad.....	125
37. Análisis y gráfico de funciones.....	127
38. Optimización.....	131
Integración final.....	133
Para recordar.....	135
Autoevaluación.....	136

Capítulo 7: INTEGRALES

39. Función primitiva. Integrales definidas.....	137
40. Integración por sustitución.....	139
41. Integración por partes.....	141
42. Integrales definidas. Regla de Barrow.....	143
43. Cálculo de áreas.....	145
Integración final.....	147
Para recordar.....	149
Autoevaluación.....	150

Capítulo 8: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

44. Variables aleatorias.....	151
45. Parámetros de posición y dispersión.....	153
46. Correlación lineal entre variables aleatorias. Recta de regresión.....	155
47. Lectura, análisis e interpretación de gráficos de dispersión.....	157
Integración 44-45-46-47.....	159
48. Distribuciones continuas.....	161
49. Distribución normal. Esperanza matemática.....	163
50. Distribución normal estándar.....	165
51. Distribución binomial.....	167
Integración final.....	171
Para recordar.....	173
Autoevaluación.....	174

Tablas de distribución normal y binomial.....	175
---	-----

1

Vectores y fractales

1. Vectores

► SABERES DINÁMICOS

Un **vector** es un segmento orientado que tiene un origen y un extremo. $\vec{ab}$ es un vector con origen en a y extremo en b . También se lo puede nombrar con una letra minúscula: $\vec{v}$.

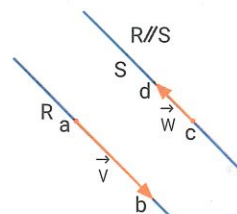
Todo vector está caracterizado por una **dirección**, un **sentido** y un **módulo**.

- La dirección de un vector $\vec{v}$, está dada por la recta que lo incluye o recta sostén.

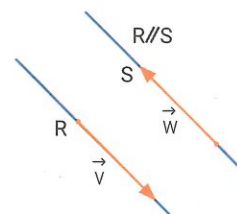
Dos vectores tienen la misma dirección cuando se encuentran sobre una misma recta sostén o en rectas paralelas. Si dos vectores se encuentran sobre la misma recta sostén, son colineales.

- El sentido de un vector $\vec{v}$ está indicado por la orientación de la flecha.
- El módulo $|\vec{v}|$ es la longitud o la medida del vector.

Los vectores $\vec{ab}$ y $\vec{cd}$ tienen la misma dirección, distinto sentido y distinto módulo.



$\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores opuestos.



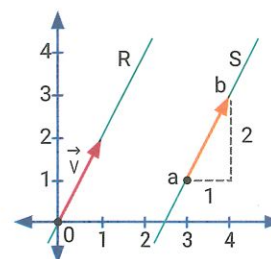
Los vectores que tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo se llaman **vectores equipolentes**.

Si dos vectores tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentido contrario, se dice que son **vectores opuestos**.

Vectores referidos al origen de coordenadas

Cuando se representa un vector equipolente a $\vec{ab}$, de forma tal que el origen de este nuevo vector coincide con el origen de coordenadas, se obtiene un **representante canónico**.

*$\vec{v}$ es un representante canónico que tiene por componentes (1; 2).
 $\vec{ab} \uparrow \vec{v}$ se lee: "vector $\vec{ab}$ equipolente al vector $\vec{v}$ ".*



Cuando el origen de un vector es el origen de coordenadas, las coordenadas del punto extremo coinciden con las componentes del vector.

Dado $\vec{ab}$ tal que $a = (x_a; y_a)$ y $b = (x_b; y_b)$, para hallar las componentes del representante canónico se aplica la siguiente fórmula:

$$\vec{ab} \uparrow \vec{v} = (x_b - x_a; y_b - y_a)$$

$$a = (2; -1) \rightarrow b = (1; -3) \Rightarrow \vec{v} = (1 - 2; -3 + 1) \Rightarrow \vec{v} = (-1; -2)$$

TIP

⇒ significa entonces.

El **vector nulo** es aquel en el cual coinciden el origen y el extremo. En símbolos se puede expresar como $\vec{v}_0$ o bien $\vec{0}$. La representación gráfica de $\vec{v}_0$ es un punto y sus coordenadas, (0; 0).

1. Vectores

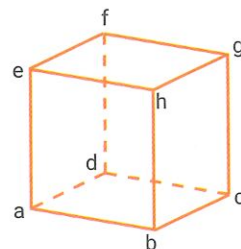
Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

- Dos vectores que tienen la misma dirección, ¿son siempre equipolentes?
- Dos vectores que tienen sentidos contrario, a veces ¿son opuestos?
- $\vec{v}$ es un representante canónico que tiene por componentes (3; 5), entonces el módulo de $\vec{v}$, ¿es 8?

2. Completen teniendo en cuenta el siguiente cubo.

- $\vec{ef}$ y $\vec{cb}$ son vectores .
- $\vec{ae}$ y $\vec{cg}$ son vectores .
- $\vec{eh}$ tiene igual dirección que .
- Volumen del cubo = 8 cm^3 , entonces el módulo de $\vec{ad}$ es .



3. Observen el siguiente sistema de ejes y resuelvan.

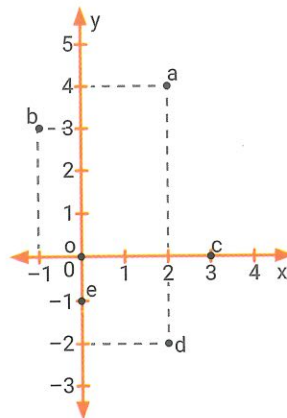
a. Escriban las coordenadas de los puntos indicados.

a = ; b = ; c = .

d = ; e = .

b. Hallen gráficamente e indiquen sus componentes.

- El representante canónico de $\vec{ba}$ y de $\vec{dc}$.
- El vector opuesto al $\vec{oe}$.
- Un vector equipolente al $\vec{oc}$.
- Un vector de igual dirección que $\vec{ed}$ y distinto módulo.



4. Completen la siguiente tabla.

Componentes del vector	Origen del vector	Extremo del vector
(2; -2)	(1; 3)	
($\sqrt{2}$; 3)		($2\sqrt{2}$; 0)
	($-\frac{1}{2}$; -2)	(1; 3)

5. Hallen los valores de a y b en cada caso.

Para recordar **pág. 19**

a. Componentes del vector = (a; -1); origen del vector = (3; -b) y el extremo = (5; -2).

b. Componentes del vector = (-2; b); origen del vector = (-1; a) y el extremo = (b; 2a).

c. Componentes del vector = (5; -5); origen del vector = (a; b) y el extremo = (3b; 2a).

2. Adición y sustracción de vectores

► SABERES DINÁMICOS

Las componentes del vector suma o resta son iguales a la suma o a la resta de las componentes de los vectores sumados.

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \wedge \vec{w} = (w_x; w_y) \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x; v_y + w_y)$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \wedge \vec{w} = (w_x; w_y) \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = (v_x - w_x; v_y - w_y)$$

TIP

^ significa y.

Sean: $\vec{v} = (2; -3)$ y $\vec{w} = (1; 2)$

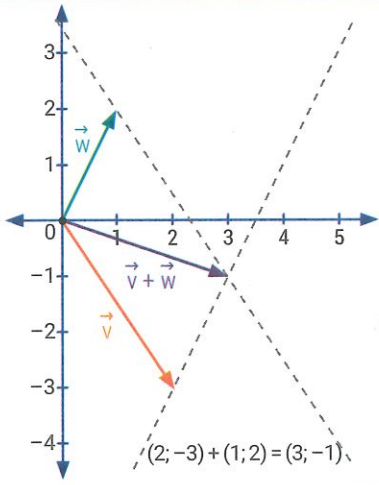
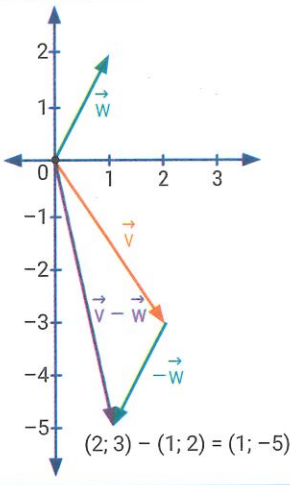
$$\vec{v} + \vec{w} = (2; -3) + (1; 2)$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (2 + 1; -3 + 2) = (3; -1)$$

$$\vec{v} - \vec{w} = (2; -3) + (1; 2)$$

$$\vec{v} - \vec{w} = (2 - 1; -3 - 2) = (1; -5)$$

Para **sumar gráficamente**, se debe emplear la regla del paralelogramo o bien la regla de la poligonal. Para **restar gráficamente**, se suma el opuesto del segundo vector.

Regla del paralelogramo	Regla de la poligonal
Se grafican los vectores con el origen en común. Por el extremo de cada uno de ellos se traza una paralela al otro vector, determinando un paralelogramo. La diagonal del paralelogramo, con origen en el origen de los vectores sumados, es el vector suma.	Se grafica un vector y a continuación, desde el extremo de este, se grafica el otro vector, cuidando de mantener la equipolencia. El vector suma es el que queda determinado por el origen del primer vector y el extremo del segundo.
	

Cuando se tienen que sumar más de dos vectores, conviene utilizar la regla de la poligonal.

